Zestaw wybranych wzorów matematycznych

Wartość bezwzględna liczby

Def. $|x| = \begin{cases} x & dla \ \ x \geq 0 \\ -x & dla \ \ x < 0 \end{cases}$

Właściwości: $|x| \geq 0$, $|-x| = |x|$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $, gdy \ y \neq 0$

Dla dowolnych liczb *a* oraz *r, gdzie* $r \geq 0$, mamy warunki równoważne:

$|x-a| \leq r \ \Leftrightarrow \ a-r \leq x \leq a+r$

$|x-a| \geq r \ \Leftrightarrow \ x \leq a-r \ \ lub \ \ x \geq a+r$

Potęgi i pierwiastki

- def. *n-tej* potęgi liczby *a:* $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \, razy}$

-pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia *n* z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę b≥ 0, taką że $b^n = a$.

-jeżeli $a < 0$ oraz liczba *n* jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

-dla dowolnej liczby *a* zachodzi równość : $\sqrt{a^2} = |a|$.

-niech *m, n* będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas :

dla $a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{\mathrm{a^n}}$

dla $a > 0$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\mathrm{a^m}}$

-niech *m, n* będą liczbami rzeczywistymi. Dla $a > 0 \ \ i \ \ b > 0$ zachodzą równości:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

$a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $(a : b)^n = a^n : b^n$

Silnie i symbole Newtona

- silnię liczby całkowitej dodatniej *n* nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

-własności silni: $0! = 1$, $1! = 1$, $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

-symbol Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

-własności symbolu Newtona : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Wzory skróconego mnożenia

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$,

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Ciąg arytmetyczny

-wzór na *n-ty* wyraz ciągu arytmetycznego:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

- wzór na sumę *n* początkowych wyrazów:

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$

-dla $n \geq 2$ $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Ciąg geometryczny

-wzór na *n-ty* wyraz ciągu geometrycznego: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- wzór na sumę *n* początkowych wyrazów:

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $dla \ q \neq 1$

-dla $n \geq 2$ $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

Funkcja kwadratowa

-postać ogólna funkcji kwadratowej:

$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

-postać kanoniczna:

$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \ \ gdzie \ \ \Delta = b^2 - 4ac$

-postać iloczynowa dla $\Delta \geq 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

-współrzędne wierzchołka paraboli: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

-miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$dla \ \Delta > 0 \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$dla \ \Delta = 0 \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$

$dla \ \Delta < 0 \quad nie \ ma \ miejsc \ zerowych$

Wektory

-współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, $gdy\ A=(x_A,y_A)\ \ B=(x_B,y_B)$

$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A,\ y_B-y_A]$

-długość wektora (lub długość odcinka):

$|\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

-współrzędne środka wektora (lub odcinka AB): $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Proste i punkty

-równanie prostej w postaci kierunkowej: $y=ax+b$

-równanie prostej w postaci ogólnej: $Ax+By+C=0$

-współczynnik kierunkowy prostej $a=tg\alpha$, α-kąt nachylenia prostej do osi *OX*

- Prosta przechodząca przez dwa punkty

$A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$

$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$

-odległość punktu $P=(x_0,y_0)$ od prostej $Ax+By+C=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

-proste o równaniach w postaci ogólnej:

$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$

są równoległe, gdy $A_1B_2-A_2B_1=0$

są prostopadłe, gdy $A_1A_2+B_1B_2=0$

- proste o równaniach kierunkowych:

$y=a_1x+b_1 \qquad y=a_2x+b_2$

są równoległe, gdy $a_1=a_2$,

są prostopadłe, gdy $a_1\cdot a_2=-1$,

Przekształcenie geometryczne

-przeniesienie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt (x,y) na punkt $(x+a,y+b)$

-symetria względem osi OY przekształca punkt (x,y) na punkt $(-x,y)$

-symetria względem osi OX przekształca punkt (x,y) na punkt $(x,-y)$

Równania okręgu

okrąg o środku $S=(a,b)$ i promieniu r ma równanie

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

lub $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ gdzie $r^2=a^2+b^2-c>0$

Trygonometria

-związki między funkcjami trygonometrycznymi lego samego kątaα, gdzie $\alpha\in(0^o,90^o)$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$

$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

-wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	$0(0^o)$	$\frac{\pi}{6}(30^o)$	$\frac{\pi}{4}(45^o)$	$\frac{\pi}{3}(60^o)$	$\frac{\pi}{2}(90^o)$
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje
$ctg\alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1